28049405e27773754b421c0f7cbfa26b49543c95674999bee5f5fb252f941fc4

Частное образовательное учреждение высшего образования
Тульский институт управления и бизнеса имени Никиты Демидовича Демидова

Кафедра
«Педагогики, психологии, гуманитарных и естественнонаучных дисциплин»

Заведующий кафедрой ППГиЕНД

_______________Кадисон Ю.Б.
«30» января 2020 г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Укрупненная группа направлений и специальностей	38.00.00 Экономика и управление
Направление	38.03.01 Экономика
Профиль	Экономика предприятий и организаций
Форма обучения	*Заочная, очная*

Тула
2020 год

Цель изучения дисциплины «Математический анализ» заключается в формировании у студентов математической культуры и логического мышления, выработки представления о роли и месте математики в современной цивилизации и в мировой культуре, умения логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и корректно использовать математические понятия и символы для выражения количественных и качественных отношений.

В результате выполнения контрольной работы по дисциплине «Математика» студенты должны:

Знать:

1. Теоретические основы теории множеств и числовых последовательностей;
2. Основные понятия и методы дифференциального и интегрального исчисления функции одной и нескольких переменных;
3. Основные понятия теории числовых и функциональных рядов; способы исследования рядов на сходимость и разложения функции в ряд;
4. Основные методы решения дифференциальных уравнений.

Уметь:

1. Применять теорию числовых последовательностей и рядов в исследовании рядов на сходимость;
2. Исследовать функцию одной переменной и строить её график с помощью пределов, дифференциального и интегрального исчисления;
3. Находить функцию по данным её производным 1-го и 2-го порядка с помощью дифференциальных уравнений;
4. Исследовать функцию нескольких переменных на экстремум и находить её наибольшее и наименьшее значения;
5. Грамотно интерпретировать полученные решения задач применительно к финансово-экономическим условиям.

Владеть:

1. Методами решений типовых задач с применением теории пределов числовых последовательностей и функции одной переменной;
2. Основными методами дифференцирования и интегрирования функций одной и нескольких переменных;
3. Основами теории дифференциальных уравнений;
4. Навыками решения финансово-экономических задач с помощью математического аппарата.

Выполнение контрольной работы по дисциплине «Математический анализ» направлено на формирование у студента следующих компетенций:

ОПК-2 - способностью осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач;

ПК-1 - способностью собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов;

ПК-2 - способностью на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов;

ПК-3 - способностью выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами.

ТРЕБОВАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ.

Контрольная работа, как одна из форм оценки уровня подготовки студентов заочного отделения, ставит своей целью закрепление теоретических знаний, полученных студентами в процессе изучения данной дисциплины, и навыков решения типовых организационно-управленческих задач математическими, статистическими и количественными методами в современных условиях.

Работа должна быть выполнена в машинописном виде на бумаге форматом А4 (210х297 мм). Текст должен располагаться на одной стороне листа. Поля: слева страницы – 30 мм, справа – 10 мм, сверху и снизу – по 20 мм. Машинописный текст набирается на компьютере шрифтом Times New Roman размером 14 pt через 1,5 интервала.

Задания должны быть пронумерованы и выполнены по порядку. В работе можно применять общепринятые условные сокращения.

Формулы следует набирать или в редакторе формул Microsoft Equation 3.0 или с помощью меню «Вставка» - Формула.

Размеры: обычный – 14 pt; крупный индекс – 12 pt; мелкий индекс – 10 pt; крупный символ – 16 pt; мелкий символ – 8 pt. Шрифты: Times New Roman - для стилей Текст, Функция, Переменная, Матрица-вектор, Переменная; Symbol - для стилей Греческие и Символ. Для стиля Переменная следует выбрать наклонное начертание, для стиля Матрица-вектор - полужирное. Расшифровка формульных обозначений дается в тексте после слова «где» без абзацного отступа, т.е. в «подбор».

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot W_N^{n \cdot k}, k = 0,..., N-1$$

Общий объем работы должен составлять 10-15 страниц машинописного текста. Нумерация всех страниц работы должна быть сквозной, порядковой, начиная с титульного листа, на котором номер страницы не проставляется, и заканчивая приложением включительно.

Титульный лист является первым листом контрольной работы (нумерация на этом листе не проставляется). Титульный лист должен содержать все установленные реквизиты: наименование учебного заведения, кафедры; наименование дисциплины; номер варианта; курс, группу, фамилию, имя, отчество исполнителя контрольной работы; фамилию, имя, отчество, учёную степень и ученое звание научного руководителя; год выполнения работы.

Содержание (оглавление) является вторым листом работы. Содержание включает перечень всех задач работы.

Слово «Содержание» записывают в виде заголовка симметрично тексту прописными (заглавными) буквами.

Контрольная работа должна обязательно содержать решения всех заданий. Задача должна начинаться с указания номера, затем пишется условие. После условия должно следовать подробное решение задачи. В конце задачи нужно писать ответ.

Список литературы отражает степень изученности студентом решаемых задач.

1. ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ И ОБРАЗЕЦ ИХ ВЫПОЛНЕНИЯ

Задача 1

Найти предел числовой последовательности:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n+1} + 3^{n+2}}{4^{n+2} + 5}$$

Решение

Сначала преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, воспользовавшись свойствами степеней:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}+3^{n+2}}{4^{n+2}+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4^n+9\cdot 3^n}{16\cdot 4^n+5}$$

Вынося за скобки наибольшее слагаемое в числителе дроби и в знаменателе дроби, а также, используя свойства пределов последовательностей, учитывая: для любого числа **a** такого, что **| a | < 1**, справедливо равенство $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4^n+9\cdot 3^n}{16\cdot 4^n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4^n\left(1+\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{16\cdot 4^n\left(1+\frac{5}{16}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}=\frac{1}{8}$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

Задача 2

Вычислить предел функции с использованием основных теорем

$$\lim_{x\to 2}\frac{3xe^{2-x}}{3x^2+\ln(x-2)+4}.$$

Решение

$$\lim_{x\to 2}\frac{3xe^{2-x}}{3x^2+\ln(x-2)+4}=\lim_{x\to 2}\frac{3\cdot 2\cdot e^{2-2}}{3\cdot 2^2+\ln(2-2)+4}=\lim_{x\to 2}\frac{6\cdot e^0}{12+\ln 0+4}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{6\cdot 1}{12-\infty+4}=\lim_{x\to 2}\frac{6}{-\infty}=0.$$

Ответ: 0.

Задача 3

Вычислить предел функции: $\lim_{x\to\pi/6}\frac{\sqrt{3}-2\cos x}{\cos 3x}$.

Решение

Имеем неопределенность $\frac{0}{0}$, приведем данный предел к первому замечательному, для этого сделаем замену переменой $x - \pi/6 = y$, тогда $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sqrt{3} - 2\cos(y + \pi/6)}{\cos 3(y + \pi/6)} =$

$$\lim_{y\to 0}\frac{2(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos(y + \pi/6))}{\cos(3y + \pi/2)} = 2\lim_{y\to 0}\frac{\cos\pi/6 - \cos(y + \pi/6)}{-\sin 3y} =$$

$$2\lim_{y\to 0}\frac{-2\sin\pi/6\cdot\sin(-y/2)}{-\sin 3y} = -2\lim_{y\to 0}\frac{y/2\cdot\sin(y/2)\cdot 3y}{y/2\cdot\sin 3y\cdot 3y} = -\frac{1}{3}$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

Задача 4

Найти производную сложной функции $y = (ax^4 + \ln x)(d\sqrt[3]{x} - a^x)$.

Решение

$$y' = (ax^4 + \ln x)'(d^3\cdot\sqrt{x} - a^x) + (ax^4 + \ln x)(d^3\cdot\sqrt{x} - a^x)';$$

$$(ax^4 + \ln x)'(d^3\cdot\sqrt{x} - a^x) = \left(4ax^3 + \frac{1}{x}\right)\left(d^3\cdot\sqrt{x} - a^x\right);$$

$$(ax^4 + \ln x)(d^3\cdot\sqrt{x} - a^x)' = (ax^4 + \ln x)\left(\frac{d^3}{2\sqrt{x}} - a^x\ln a\right);$$

Ответ: $y' = \left(4ax^3 + \frac{1}{x}\right)\left(d^3\cdot\sqrt{x} - a^x\right) + (ax^4 + \ln x)\left(\frac{d^3}{2\sqrt{x}} - a^x\ln a\right)$.

Задача 5

Найти производную n-го порядка функции $y = 3^{2x+1}$.

Решение.

Вычислим последовательно несколько производных, начиная с производной первого порядка: $y' = (3^{2x+1})' = 3^{2x+1}\cdot\ln 3(2x+1)' = 3^{2x+1}\cdot 2\ln 3$,

$$y'' = (y')' = (3^{2x+1}\cdot 2\ln 3)' = (3^{2x+1})'\cdot 2\ln 3 = 3^{2x+1}\cdot 2^2\ln^2 3,$$

$$y''' = (y'')' = (3^{2x+1}\cdot 2^2\ln^2 3)' = (3^{2x+1})'\cdot 2^2\ln^2 3 = 3^{2x+1}\cdot 2^3\ln^3 3.$$

Отсюда видно, что производная n-го порядка выражается формулой:

$$y^{(n)} = (3^{2x+1})^{(n)} = 3^{2x+1}\cdot 2^n\ln^n 3.$$

Ответ: $y^{(n)} = 3^{2x+1}\cdot 2^n\ln^n 3.$

Задача 6

Найти наибольшее и наименьшее значение функции на интервале $[-2;\ 2]$

$$y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2$$

Решение

1. Находим первую производную заданной функции

$$y' = 5x^4 - 5x^2$$

2. Определяем критические точки первого рода:

$5x^4 - 5x^2 = 0$, откуда: $x_1 = -1$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 1$..

1. Подвергаем эти точки дополнительному исследованию:

x	-2	$(-2;\ -1)$	-1	$(-1;\ 0)$	0	$(0;\ 1)$	1	$(1;\ 2)$	2
Знак $f'(x)$		$+$	0	-	0	-	0	$+$	
Величина $f(x)$	$-\frac{50}{3}$	$\nearrow$	$\frac{8}{3}$	$\searrow$	2	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$\frac{82}{3}$
Экстремум			M		$Т.П.$		m		

$$\max_{[-2;\,2]} f(2) = \frac{82}{3}; \qquad \min_{[-2;\,2]} f(-2) = -\frac{50}{3}.$$

Ответ: В данном случае глобальные экстремумы не совпадают ни с одним из локальных экстремумов.

Задача 7

Раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ с использованием правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}} = \left[\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{0^2+1}-1}{\sqrt{0+3}-\sqrt{3}} = \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x2\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 0\cdot\sqrt{0+3}}{\sqrt{0^2+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{1} = 0$$

Ответ: 0.

Задача 8

Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график.

$$y = -\,{}^{1}/_{4}\,(x^3 - 3x^2 + 4)$$

Решение:

1. Область определения функции – вся числовая прямая, то есть D(y) = (−∞; +) . Точек разрыва нет, вертикальных асимптот нет.

2. Точки пересечения с осями координат:

$Ox:\ -\,{}^{1}/_{4}\,(x^3 - 3x^2 + 4) = 0,\ \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2,$ точки (-1,0), (2,0).

$Oy: x = 0,\ \Rightarrow y = -1/4\ \ (0 - 0 + 4) = -1$, точка (0, -1).

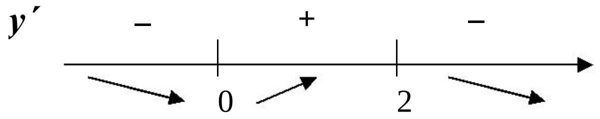
3. Функция общего вида, так как

$$y(-x) = -1/4\,((-x)^3 - 3(-x)^2 + 4) = -14\,(-x^3 - 3x^2 + 4) \neq \pm y(x)$$

4. Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'(x) = -\,{}^{1}/_{4}\,(x^3 - 3x^2 + 4)' = -\,{}^{1}/_{4}\,(3x^2 - 6x) = -\,{}^{3}/_{4}\,x(x-2)$$
$$y'(x) = 0 \Rightarrow -\,{}^{3}/_{4}\,x(x-2) = 0$$

Находим критические точки: $x_1 = 0,\ x_2 = 2$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.

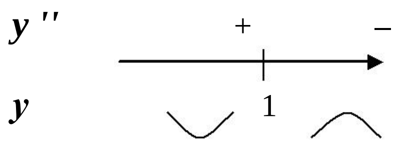


Функция убывает на интервалах (−∞;0)∪(2; +), возрастает на интервале (0; 2).
Функция имеет минимум в точке x = 0 , y(0) = −1,
функция имеет максимум в точке x = 2 , y(2) = 0

5. Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

$$y''(x) = -\,{}^{3}/_{4}\,(x^2 - 2x)' = -\,{}^{3}/_{2}(x-1)$$

Находим критические точки: $y''(x) = 0$: $x = 1$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.

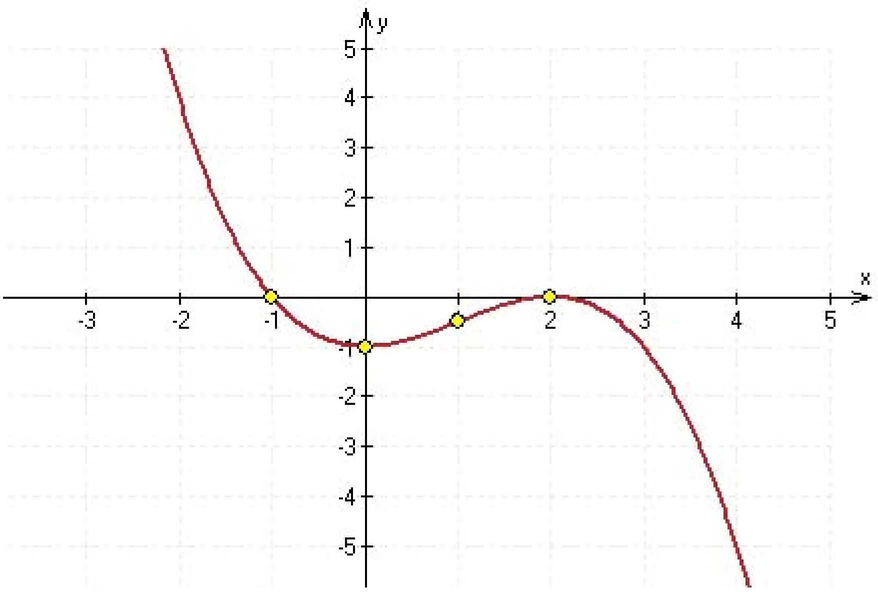


Функция выпукла вверх на интервале $(1; +\infty)$, выпукла вниз на интервале $(-\infty;1)$.
Точка перегиба: $x = 1$, $y(1) = -0,5$.

6. Асимптоты.

Так как $\boldsymbol{lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = -\frac{1}{4}lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+4}{x} = lim_{x\to\infty}(x^2-3x+4/x) = -\infty}$,
асимптот нет.

7. Строим график функции, отметим ключевые точки:



Задача 9

Вычислить приближенно значение $\sqrt{5}$.

Решение.

Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, тогда $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,
приращение $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$.

Следовательно, $\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x} \approx \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \Delta x \Rightarrow \sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$. (*)

Полагая 5 = 4 + 1 (x = 4, $\Delta x = 1$), и применяя формулу (*), имеем:

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} = 2 + \frac{1}{4} = 2{,}25$$

Ответ: 2,25

Задача 10

Вычислить эластичность функции $y = 5 - \frac{0{,}05}{x^2}$, в точке $x = 3$.

Решение:

1. Находим производную заданной функции:

$$y' = -\frac{0,1}{x^3}.$$

2. Находим отношение x/y:

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{5 - \frac{0,05}{x^2}} = \frac{x^3}{5x^2 - 0,05}.$$

3 Определяем эластичность функции:

$$E = \frac{x}{y} y' = \frac{x^3}{5x^2 - 0,05} \cdot \left(-\frac{0,1}{x^3}\right) = \frac{-0,1}{5x^2 - 0,05} = \frac{1}{0,5 - 50x^2}.$$

4. Вычисляем эластичность функции в точке $x = 3$:

$$E_{x=3} = \frac{1}{0,5 - 50x^2} = \frac{1}{0,5 - 50 \cdot 3^2} = -0,0206.$$

Ответ: увеличение независимой переменной x на 1% приведет к уменьшению функции y на 2,06% при x = 3.

Задача 11

Вычислить неопределенный интеграл методом подстановки $\int 5^{\sin x} \cos x dx$.

Решение

$$\int 5^{\sin x} \cos x dx = \int 5^{\sin x} d \sin x = \int 5^u du = \frac{5^u}{\ln 5} + C = \frac{5^{\sin x}}{\ln 5} + C$$

Задача 6

Найти интеграл от рациональной дроби $\int \frac{6x-1}{x^2 - 6x + 8} dx$

Решение:

1. Выделяем в знаменателе полный квадрат:

$$x^2 - 6x + 8 = x^2 - 2 \cdot 3x + (3)^2 - (3)^2 + 8 = \left(x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2\right) - 1 = (x-3)^2 - 1^2,$$

2. Представляем квадратный многочлен в виде произведения двух сомножителей:

$$x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1 = (x - 3 - 1)(x - 3 + 1) = (x-4)(x-2).$$

3. Исходный интеграл приводим к виду:

$$\int \frac{6x-1}{x^2 - 6x + 8} dx = \int \frac{6x-1}{(x-4)(x-2)} dx.$$

4. Разлагаем подынтегральное выражение на сумму элементарных дробей

$$\frac{6x-1}{(x-4)(x-2)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-4)(x-2)}.$$

$$\begin{cases}6=A+B\\-1=-4A-2B\end{cases},$$

$$+\begin{cases}24=4A+4B\\-1=-4A-2B\end{cases}$$
$$\overline{\quad 23=2B \quad}.$$

Откуда следует $B=11{,}5,\quad A=-5{,}5$, а исходный интеграл принимает вид суммы табличных интегралов:

$$\int\frac{6x-1}{x^2-6x+8}dx=\int\frac{6x-1}{(x-4)(x-2)}dx=\int\frac{-5{,}5}{x-4}dx+\int\frac{11{,}5}{x-2}dx.$$

5. Записываем решение:

$$\int\frac{6x-1}{x^2-6x+8}dx=-5{,}5\int\frac{d(x-4)}{x-4}+11{,}5\int\frac{d(x-2)}{x-2}=$$
$$=-5{,}5\ln|x-4|+11{,}5\ln|x-2|+C$$

Ответ: *-5,5 ln|x – 4| + 11,5ln|x – 2| + C.*

Задача 12

Вычислить определенный интеграл методом интегрирования по частям

$$\int_0^3(x+1)e^x dx.$$

Решение:

$$\int_0^3(x+1)e^x dx=\left|\begin{matrix}u=x+1 & \Rightarrow & du=dx\\ dv=e^x dx & \Rightarrow & v=\int e^x dx=e^x\end{matrix}\right|=(x+1)e^x\Big|_0^3-\int_0^3 e^x dx=$$

$$=\left[(x+1)e^x-e^x\right]\Big|_0^3=e^x(x+1-1)\Big|_0^3=xe^x\Big|_0^3=3\cdot e^3-0\cdot e^0=3e^3.$$

Ответ: $3e^3$.

Задача 13

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^x dx.$$

Решение:

Это интеграл с бесконечным верхним и нижним пределами интегрирования, поэтому записываем его в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int_{-\infty}^{0} e^x dx + \int_{0}^{+\infty} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^x dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} e^x dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} e^x \big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} e^x \big|_0^b$$

$$= \lim_{a\to-\infty}(e^0 - e^a) + \lim_{b\to+\infty}(e^b - e^0) == \lim_{a\to-\infty}(e^0 - e^{-\infty})$$

$$+ \lim_{b\to+\infty}(e^\infty - e^0)$$

$$= \lim_{a\to-\infty}(1-0) + \lim_{b\to+\infty}(\infty - 1) == 1 - 0 + \infty - 1 = 1 + \infty = \infty.$$

Итак, второй интеграл расходится (равен ∞), а, следовательно, расходится весь интеграл, то есть этот интеграл не существует.

Задача 14

Решить линейное дифференциальное уравнение

$$y^/ cosx = \frac{y}{lny}.$$

Решение

1. Записываем уравнение с разделяющимися переменными в стандартной форме, то есть разделяем переменные:

$$\frac{dy}{dx}cosx = \frac{y}{lny} \quad \to \quad \frac{lnydy}{y} = \frac{dx}{cosx}.$$

2. Выполняем почленное интегрирование, полученного уравнения с разделенными переменными:

$$\int \frac{lnydy}{y} = \int \frac{dx}{cosx} + \mathrm{C} \quad \to \int lnyd(lny) = \int \frac{dx}{cosx} + \mathrm{C}.$$

Откуда получим с учетом того, что второй интеграл табличный, окончательное решение:

$$\frac{1}{2}ln^2y = lntg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C_1,$$

или в равноценном виде:

$$lny = \sqrt{2lntg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + C.$$

Задача 15

Найти и проверить решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка $\boldsymbol{y'' + 2y' - 8y = x^2}$.

Решение

1. Записываем однородное уравнение, соответствующее заданному неоднородному $\boldsymbol{y'' + 2y' - 8 = 0}$.

2. Записываем характеристическое уравнение однородного уравнения $\boldsymbol{k^2 + 2k - 8 = 0}$,

3. Решаем это квадратное уравнение

$$k_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(-8)}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2},$$

откуда $k_1=-4$, $k_2=2$.

4. Записываем общее решение однородного уравнения

$$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{2x}.$$

5. Частное решение заданного неоднородного уравнения ищем в форме многочлена вида

$$\tilde{y}=Ax^2+Bx+C,$$

так как корни характеристического уравнения не равны нулю ($r=0$), а многочлен должен быть полным.

6. Для нахождения неизвестных коэффициентов A, B и C подставляем частное решение $\tilde{y}$ и его производные в заданное неоднородное уравнение. Подстановку производим, записывая уравнение в обратной последовательности:

$$x^2=-8y+2y'+y''$$

$$x^2=-8\left(Ax^2+Bx+C\right)+2\left(2Ax+B\right)+2A.$$

Далее группируем слагаемые правой части равенства по степеням x

$$x^2=x^2(-8A)+x(-8B+4A)+(-8C+2B+2A)$$

и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства

$$\begin{cases}1=-8A,\\0=-8B+4A,\\0=-8C+2B+2A,\end{cases}$$

Решая, получившуюся систему уравнений, имеем:

$A=-1/8$, $B=-1/16$, $C=-3/64$.

7. Записываем частное решение неоднородного уравнения:

$$\tilde{y}=-\frac{x^2}{8}-\frac{x}{16}-\frac{3}{64}=-\frac{8x^2+4x+3}{64}$$

8. Записываем общее решение неоднородного уравнения, складывая общее решение для однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения:

$$Y=C_1e^{-4x}+C_2e^{2x}-\left(8x^2+4x+3\right)/64.$$

$$x^2=-8y+2y'+y''=-8\left(C_1e^{-4x}+C_2e^{2x}-\frac{8x^2+4x+3}{64}\right)+$$

$$+2\left(-4C_1e^{-4x}+2C_2e^{2x}-\frac{16x+4}{64}\right)+\left(16C_1e^{-4x}+4C_2e^{2x}-\frac{16}{64}\right)=$$

$$=\cancel{-8C_1e^{-4x}}\cancel{-8C_2e^{x}}+\frac{8x^2+4x+3}{8}-\cancel{8C_1e^{-4x}}+\cancel{4C_2e^{x}}-\frac{16x+4}{32}+\cancel{16C_1e^{-4x}}+$$

$$+\cancel{4C_2e^{x}}-\frac{1}{4}=\frac{8x^2+4x+3}{8}-\frac{16x+4}{32}-\frac{1}{4}=\frac{32x^2+\cancel{16x}+\cancel{12}\cancel{-16x}\cancel{-4}\cancel{-8}}{32}=x^2$$

В результате проверки получено тождественное равенство $x^2\equiv x^2$, следовательно, уравнение решено верно.

Задача 16

Проверить сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$, используя признаки сходимости Даламбера или Коши.

Решение

Воспользуемся признаком сходимости Даламбера:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}:\frac{3^n n!}{n^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\cdot 3^n n!(n+1)}{(n+1)^n(n+1)}\cdot\frac{n^n}{3^n n!}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}=\frac{3}{2{,}7128}=1{,}106>1$$

Ответ: так как признак сходимости рядов Даламбера оказался больше единицы, то заданный ряд расходится.

Задача 17

Установить абсолютную или условную сходимость знакопеременного ряда:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}+\cdots\ (1)$$

Решение

1. Составим ряд из абсолютных величин: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\ (2)$ - ряд представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем: $q = ½ < 1$, следовательно ряд (2) сходится.
2. Так как для ряда (2) выполняется: $u_{n+1} < u_n$ и он сходится, то ряд (1) сходится абсолютно.

Ответ: данный ряд сходится абсолютно.

Задача 18

Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^n}$

Решение:

Составим ряд из модулей членов заданного ряда, то есть с общим членом $u_n=\frac{|x|^n}{4^n}$

Получаем ряд с положительными членами и исследуем его на сходимость с помощью признака Даламбера.

Для предела нам еще нужен следующий член ряда $u_{n+1}=\frac{|x|^{n+1}}{4^{n+1}}$

Подставляем члены ряда в предел и вычисляем

$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n\cdot|x|^{n+1}\cdot}{4^{n+1}\cdot|x|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n\cdot|x|^n|x|}{4^n\cdot 4\cdot|x|^n} = \frac{|x|}{4}.$

При пределе меньшем единицы $\frac{|x|}{4}<1$ - ряд убывает по признаку Даламбера.

Из этого условия находим $|x|<4 \to -4<x<4$ - область сходимости в виде ограничений переменной.

Ответ: R=4 - радиус сходимости ряда и его область сходимости $x\in(-4;4)$

Задача 19

Вычислить полный дифференциал функции нескольких переменных

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$$

Решение

1. Вычислим частные производные функции двух переменных:

$f'_x = (\ln(x^2+y^2))'_x = \frac{1}{(x^2+y^2)}\cdot(x^2+y^2)'_x = \frac{2x}{(x^2+y^2)}$,

$f'_y = (\ln(x^2+y^2))'_y = \frac{1}{(x^2+y^2)}\cdot(x^2+y^2)'_y = \frac{2y}{(x^2+y^2)}$,

2. Находим полный дифференциал по формуле: $dF(x,y) = f'_x dx + f'_y dy$

$$dF(x,y) = \frac{2x}{(x^2+y^2)}dx + \frac{2y}{(x^2+y^2)}dy = \frac{2(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)}$$

Ответ: $dF(x,y) = \frac{2(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)}$

Задача 20

Определить экстремум функции двух переменных

$$z = -4x - 5y + x^2 + xy + y^2.$$

Решение

1. Находим первые частные производные заданной функции:

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x} = -4+2x+y;\\ \frac{\partial z}{\partial y} = -5+x+2y.\end{cases}$$

2. Приравниваем производные к нулю и переносим свободные члены вправо:

$$\begin{cases}2x+y=4;\\ x+2y=5.\end{cases}$$

3. Решаем эту систему методом Гаусса (методом вычитания, предварительно умножив первое произведение на 2) и получаем:

$$3x = 3 \quad \to \quad x = 1, \qquad y = 4-2x = 4-2\cdot 1 = 2.$$

Итак, критической точкой является точка с координатами $(1,2)$.

4. Находят вторые производные от заданной функции:

$$\begin{cases} A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \\ B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \\ C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2. \end{cases}$$

5. Вычисляем определитель матрицы вторых производных:

$$\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0,$$

Отсюда следует, что в критической точке функция имеет экстремум ($\Delta > 0$), при этом минимум функции ($A > 0$).

6. Вычисляем величину минимума функции в точке с координатами $(1, 2)$:

$$z_{min} = -4x_0 - 5y_0 + x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2 == -4 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + 1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2 = -7.$$

Ответ: функция имеет точку минимума с координатами (1; 2), при этом значение функции z_{min} = -7.

Образец оформления титульного листа

Частное образовательное учреждение высшего образования
Тульский институт управления и бизнеса
имени Никиты Демидовича Демидова
(ЧОУ ВО ТИУБ им. Н.Д. Демидова)

Кафедра «ППГиЕНД»

Контрольная работа

по дисциплине: «Математический анализ»

на тему:
«Технология обработки текстовой информации с использованием текстового процессора MS Word»

группа _____

Выполнил: ____________________________ _____________________
(подпись студента) (ФИО студента)

Проверил: ___________________________ ______________________
(подпись преподавателя) (ФИО преподавателя)

Тула, 2020